

## The use of multi-equation models in the analysis of dynamic processes in marine diesel engines

*Contemporary empirical research on combustion engines are processed based on the theory of experiment. Available software applications analyzing the experimental data commonly utilize multiple regression models, which enables studying of the effects and interactions between input values of the model and a single output variable. Using multi-equation models gives free hand at analyzing measurement results because it enables analysis of the effects and interaction of many output variables. It also allows analysis of the measurement results during dynamic processes. In this paper the author presents advantages of using a multidimensional regression model on the example of research conducted on engine test stand.*

Key words: diagnostic, theory of experiments, marine diesel engine, exhaust emissions, multi-equation models

### Wykorzystanie modeli wielorównaniowych do analizy procesów dynamicznych w badaniach okrętowych silników spalinowych

*Współczesne badania silnikowe przeprowadza się na podstawie teorii eksperymentu. Dostępne aplikacje programów służących do analizy danych eksperymentalnych powszechnie wykorzystują model regresji wielokrotnej, który umożliwia badanie efektów i interakcji pomiędzy wielkościami wejściowymi modelu a jedną zmienną wyjściową. Zastosowanie modeli wielorównaniowych daje więcej swobody podczas analizy wyników pomiarowych, gdyż umożliwia jednoczesną analizę efektów i interakcji wielu zmiennych wyjściowych. Umożliwia również analizę wyników pomiarów podczas procesów dynamicznych. W pracy przedstawiono zalety stosowania modelu regresji wielowymiarowej na przykładzie badań przeprowadzonych na stanowisku silnika badawczego.*

Słowa kluczowe: diagnostyka, teoria eksperymentów, silnik okrętowy, toksyczność spalin, modele wielorównaniowe

#### 1. Introduction

During the engine working processes its structural parameters are changing. This affects its performance described by a set of output parameters. The mutual relationship between the parameters of the structure and the parameters of the engine output under certain conditions allows to treat the symptoms of the output parameters as the engine condition measured without its prior dismantling because the physical-chemical processes occurring during the working process and figures describing them can generally be observed and measured from the outside. These figures include the value of the exhaust emissions.

This simple combination is of interest to writers and aims to analyze the suitability and performance indexes to evaluate the emission parameters of the engine structure. At this point however, a comment is in place, as in the classic sense, an output parameter can be regarded as diagnostic only when meeting the characteristics such as: non-ambiguity, sufficient width of the field of changes and availability. Should the indexes and emission characteristics be considered a diagnostic parameter then?

Given the complicated measure, the cost of equipment, the ambiguity (the presence of extremes), and the characteristics of the exhaust components, a negative answer comes to mind. Nevertheless, a rapid development of measurement methods, progressively more advanced analyzers with increasing measurement power i.e.: speed and archiving

#### 1. Wstęp

Podczas procesu roboczego silnika zmianom ulegają parametry jego struktury. Wpływa to na jego osiągi, opisane zbiorem parametrów wyjściowych. Wzajemny związek pomiędzy parametrami struktury i parametrami wyjściowymi silnika pozwala, w określonych warunkach, traktować parametry wyjściowe jako symptomy stanu technicznego silnika, mierzone bez jego demontażu, ponieważ procesy fizykochemiczne zachodzące podczas procesu roboczego i opisujące je wielkości mogą być obserwowane i mierzone z zewnątrz. Do tych wielkości należy między innymi wartość emisji składników spalin.

Takie proste skojarzenie jest w kręgu zainteresowań autorów niniejszej publikacji i ma na celu analizę przydatności wskaźników i charakterystyk emisji spalin do oceny parametrów struktury silnika. Niezbędny jest tu jednak komentarz, mianowicie: w klasycznym ujęciu parametr wyjściowy może być uznany za diagnostyczny jedynie przy jednoczesnym spełnieniu cech: jednoznaczności, dostatecznej szerokości pola zmian oraz dostępności. Czy więc wskaźniki i charakterystyki emisji mogą być uznane za parametr diagnostyczny?

Zważywszy na skomplikowany pomiar, wysoki koszt aparatury, a także niejednoznaczność (występowanie ekstremów) charakterystyk związków toksycznych, nasuwa się odpowiedź negatywna. Jednak szybki rozwój metod pomiarowych, coraz doskonalsze analizatory przy coraz większej

capacity, which makes the signal of the exhaust emission changes more useful, carrying more information for subsequent analysis.

The above approach goes as far as to impose a need to use the theory in empirical research experiment. The primary objective of this research work is to demonstrate the relationship between the input signals (introduced by the investigator), and the output signals (seen by him). The ultimate goal of statistical analysis of the measurement results is to define a function of the test object and an empirical model of a functional engine. Very extensive calculations using probability theory, stochastic processes, and calculus that are associated with this task are very labor-intensive and, without the use of computer technology and specialized software, they are impracticable. In the process of solving problems of inter-relations and complementary aspects of approximation, the correlation statistics, assessment of the relevance and measurement uncertainty as well as the adequacy of the test object functions, including questions of mathematical and graphical determination of singular points, available computer programs are used including the package of STATISTICA PL.

It should be stressed that the statistical computer analysis can involve a number of models that do not include interaction and do not take into account the interactions of varying degrees of involvement adopted to describe the model input variables. At the same time there is a possibility in the statistical analysis to reject (ignore) both freely chosen input variables describing the object of research as well as various types of interactions. This means that choosing the right (most appropriate) model depends on the operator, and his expertise and specialized knowledge on the theoretical bases of the discussed issue.

While assuming a less accurate representation of reality, practically when determining the nature of the change (trend) of the output quantities, there is a possibility of a significant simplification of the approximating polynomials by considering only the input variables and their only statistically significant interactions. The complexity of the model and the degree of entanglement of the basic volumes are also strongly determined by the degree of approximating polynomials. Hence, it is reasonable to seek to create models of a possibly simple form, most preferably linear models. It is assumed that due to the possibility of errors, it is better to describe the studied problem of non-linear nature with small linear segments than a non-linear description of a complex whole.

The software commonly used in the field of experimental design and subsequent analysis does not provide the freedom to analyze the collected material and uses ready analysis diagrams described above. Thus, interfering with the program (software package) itself is not possible. The recently observed development of social sciences, medicine and economics has caused rapid progress in the application of statistical methods securing the planning of the experiment [1, 2, 3, 5, 6]. In this area, econometrics in particular has some great achievements and the new approach to statisti-

mocy pomiarowej, tj. szybkości i pojemności elementów archiwizujących, czynią sygnał zmian emisji związków toksycznych bardziej użyteczny, zawierający coraz więcej informacji przydatnych w późniejszej analizie.

Przedstawione wyżej podejście zmusza do stosowania w badaniach empirycznych teorii eksperymentu. Podstawowym celem tak prowadzonych badań naukowych jest wykazanie zależności pomiędzy sygnałami wejściowymi (wprowadzanymi przez badacza) a sygnałami wyjściowymi (przez badacza obserwowanymi). Ostatecznym celem analizy statystycznej wyników pomiarów jest wyznaczenie funkcji obiektu badań oraz empirycznego modelu funkcjonalnego silnika. Związane z tym zadaniem szerokie obliczenia przy zastosowaniu rachunku prawdopodobieństwa, teorii procesów stochastycznych, rachunku różniczkowego są bardzo pracochłonne i bez zastosowania techniki komputerowej oraz specjalistycznego oprogramowania nie są możliwe. W rozwiązywaniu problemów dotyczących wzajemnych powiązań i uzupełniających zagadnień aproksymacji, korelacji statystycznych, oceny istotności i niedokładności pomiarów oraz adekwatności funkcji obiektu badań, łącznie z zagadnieniami matematycznego i graficznego wyznaczania punktów osobliwych, wykorzystuje się dostępne programy komputerowe, między innymi pakiet STATISTICA PL.

Należy podkreślić, że statystyczna analiza komputerowa może dotyczyć różnych modeli, nieuwzględniających interakcji oraz uwzględniających interakcje o różnym stopniu uwikłania, przyjętych do opisu modelu wielkości wejściowych. Jednocześnie występuje możliwość odrzucenia (zignorowania) w analizie statystycznej zarówno dowolnie wybranych wielkości wejściowych opisujących obiekt badań, jak i różnego typu interakcji. Oznacza to, że wybór odpowiedniego (najbardziej adekwatnego) modelu zależy od operatora oraz jego wiedzy i znajomości specjalistycznych podstaw teoretycznych badanego zagadnienia.

Przy zakładanej mniejszej dokładności odwzorowania rzeczywistości, a praktycznie przy wyznaczaniu charakteru zmian (trendu) wielkości wyjściowych, występuje możliwość znacznego uproszczenia wielomianów aproksymujących przez uwzględnienie tylko wielkości wejściowych i ich interakcji wyłącznie statystycznie istotnych. O złożoności modelu oraz o stopniu uwikłania wielkości podstawowych decyduje także stopień wielomianów aproksymujących. Zatem uzasadnione jest dążenie do tworzenia modeli o prostej postaci, a najkorzystniej modeli liniowych. Przyjmuje się, że ze względu na możliwość popełnienia błędów, lepiej jest opisać badane zagadnienie o nieliniowym charakterze małymi odcinkami liniowymi, niż jednym złożonym nieliniowym opisem całościowym.

Powszechnie stosowane oprogramowanie z zakresu planowania doświadczeń i późniejszej ich analizy nie daje jednak swobody w analizowaniu zebranego materiału, a wykorzystuje gotowe, wyżej przedstawione schematy analizy. Ingerowanie więc w sam program (pakiet programowy) nie jest możliwe. Obserwowany w ostatnim okresie rozwój nauk społecznych, medycznych i ekonomicznych spowodował szybki postęp w stosowaniu metod statystycznych,



Multi-equation models, as demonstrated by the earlier works of the authors, show a significant adjustment to the value obtained in the experiment [7 – 11]. However, they describe the changes in the output parameters (indexes of exhaust components) in steady states of the engine, when the influence of structural parameters is not the greatest. Hence, the problem with the wide variety of changes in the output parameter. The situation changes when we perform an analysis of the changes in the output parameters during transient processes. In the course of their duration, due to, among other things, imperfections of control systems, there is a chance of a repeated, though usually short-term instances when the parameter values are exceeded in comparison to the set state. The effect of the structural parameters is significantly greater then, thereby the issue with the variety of changes in the output parameter is less severe.

Using these operating states, somewhat detrimental to the engine, the authors decided to implement multi-equation models for the analysis of dynamic processes tested in the engine steady states.

## 2. Identification of a dynamic process of a multi-equation model

Assuming that the process of changing the exhaust emissions occurs over time, which means it is dynamic, the multi-equation model can be described with a system of linear differential equations. Since the measurement of the concentration of the exhaust components is a discrete measurement, the time-discrete signal (time sequence) is a function whose domain is the congregation of integers. Thus, a discrete-time signal is a sequence of numbers. This kind of sequences will continue to be recorded in the functional notation.

Discrete-time signal  $x[k]$  is often determined by sampling  $x(t)$ , a continuous signal in time. If the sampling is uniform, then  $x[k] = x(kT)$ . Constant  $T$  is called the sampling period. The course of the dynamic process in time depends not only on the value of input functions at a given time but also the value of input functions in the past. Thus, the dynamic process (system) has a memory where it stores the consequences of past interactions.

The relations between the input signals  $x_1[k], x_2[k], \dots, x_n[k]$ , and the output signals  $y_1[k], y_2[k], \dots, y_m[k]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , will be described by a system of linear differential equations:

$$\begin{cases} y_1[k+1] = a_{11}y_1[k] + a_{12}y_2[k] + \dots + a_{1m}y_m[k] + \\ + b_{11}x_1[k] + b_{12}x_2[k] + \dots + b_{1n}x_n[k] + \xi_1 \\ y_2[k+1] = a_{21}y_1[k] + a_{22}y_2[k] + \dots + a_{2m}y_m[k] + \\ + b_{21}x_1[k] + b_{22}x_2[k] + \dots + b_{2n}x_n[k] + \xi_2 \\ \dots \\ y_m[k+1] = a_{m1}y_1[k] + a_{m2}y_2[k] + \dots + a_{mm}y_m[k] + \\ + b_{m1}x_1[k] + b_{m2}x_2[k] + \dots + b_{mn}x_n[k] + \xi_m \end{cases} \quad (4)$$

where:  $y_i[k]$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  – output signal values at  $k$ ,  $x_j[k]$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  – input signal values at  $k$ ,  $a_{ij}$  – is a coefficient

tym samym problem szerokości pola zmian parametru wyjściowego jest mniejszy.

Wykorzystując te niekorzystne dla silnika stany pracy, postanowiono zaimplementować, sprawdzone podczas stanów ustalonych, modele wielorównaniowe do analizy procesów dynamicznych.

## 2. Identyfikacja wielorównaniowego modelu procesu dynamicznego

Przy założeniu, że proces zmian toksyczności spalin zachodzi w czasie, czyli ma dynamikę, model wielorównaniowy można opisać układem liniowych równań różnicowych. Ponieważ pomiar stężenia związków toksycznych ma charakter pomiaru dyskretnego, sygnałem dyskretnym w czasie (szeregiem czasowym) jest funkcja, której dziedziną jest zbiór liczb całkowitych. Zatem sygnał dyskretny w czasie jest ciągiem liczb. Tego rodzaju ciągi będą dalej zapisywane w notacji funkcyjnej  $x[k]$ .

Sygnał  $x[k]$  dyskretny w czasie jest często wyznaczany za pomocą próbkowania sygnału  $x(t)$  ciągłego w czasie. Jeśli próbkowanie jest równomierne, to  $x[k] = x(kT)$ . Stała  $T$  nazywana jest okresem próbkowania. Przebieg procesu dynamicznego w czasie zależy nie tylko od wartości wymuszeń w danej chwili, ale również od wartości tych wymuszeń w przeszłości. Zatem proces (układ) dynamiczny ma pamięć, w której są gromadzone skutki przeszłych oddziaływań.

Zależności między sygnałami wejściowymi  $x_1[k], x_2[k], \dots, x_n[k]$  a sygnałami wyjściowymi  $y_1[k], y_2[k], \dots, y_m[k]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , opisuje się za pomocą układu liniowych równań różnicowych (4), gdzie:  $y_i[k]$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  – wartości sygnałów wyjściowych w chwili  $k$ ,  $x_j[k]$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  – wartości sygnałów wejściowych w chwili  $k$ ,  $a_{ij}$  – współczynnik występujący w  $i$ -tym równaniu przy  $j$ -tym sygnale wyjściowym,  $a_{ij}$  – współczynnik występujący w  $i$ -tym równaniu przy  $j$ -tym sygnale wejściowym,  $i, j = 1, 2, \dots, m, b_{ij}$  – nieobserwowalny składnik losowy w  $i$ -tym równaniu.

Analogicznie do układu równań (1), układ równań (4) można zapisać w postaci macierzowej (5), gdzie:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}[k] = \begin{bmatrix} y_1[k] \\ y_2[k] \\ \dots \\ y_m[k] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}[k+1] = \begin{bmatrix} y_1[k+1] \\ y_2[k+1] \\ \dots \\ y_m[k+1] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}[k] = \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \dots \\ x_n[k] \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_m \end{bmatrix}$$



found in  $i$ -th equation with  $j$ -th output signal,  $i, j = 1, 2, \dots, m$ ,  $b_{ij}$  – is a coefficient found in  $i$ -th equation with  $j$ -th input signal,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ ,  $\xi_i$  – is a non-observable random component in  $i$ -th equation.

In analogy to (1), the system of equations (4) can be written in a matrix form:

$$\mathbf{y}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{y}[k] + \mathbf{B}\mathbf{x}[k] + \boldsymbol{\xi} \quad (5)$$

where:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}[k] = \begin{bmatrix} y_1[k] \\ y_2[k] \\ \dots \\ y_m[k] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}[k+1] = \begin{bmatrix} y_1[k+1] \\ y_2[k+1] \\ \dots \\ y_m[k+1] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}[k] = \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \dots \\ x_n[k] \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

Later denoting:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} & c_{1m+1} & c_{1m+2} & \dots & c_{1m+n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} & c_{2m+1} & c_{2m+2} & \dots & c_{2m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m1} & \dots & c_{mn} & c_{mm} & c_{mm+1} & \dots & \pi_{mm+n} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix}$$

$$c_{iv}[k] = b_{iv}[k], \text{ for } v = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

$$c_{iv}[k] = a_{iv}[k], \text{ for } v = m+1, m+2, \dots, m+n,$$

$$\mathbf{z}[k] = \begin{bmatrix} z_1[k] \\ \vdots \\ z_m[k] \\ z_{m+1}[k] \\ \vdots \\ z_{m+n}[k] \end{bmatrix}$$

$$z_v[k] = y_v[k], \text{ for } v = 1, 2, \dots, m,$$

$$z_v[k] = x_{v-m}[k], \text{ for } v = m+1, m+2, \dots, m+n$$

Po oznaczeniu:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} & c_{1m+1} & c_{1m+2} & \dots & c_{1m+n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} & c_{2m+1} & c_{2m+2} & \dots & c_{2m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m1} & \dots & c_{mn} & c_{mm} & c_{mm+1} & \dots & \pi_{mm+n} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix}$$

$$c_{iv}[k] = b_{iv}[k], \text{ dla } v = 1, 2, \dots, m,$$

$$c_{iv}[k] = a_{iv}[k], \text{ dla } v = m+1, m+2, \dots, m+n, \quad (6)$$

$$\mathbf{z}[k] = \begin{bmatrix} z_1[k] \\ \vdots \\ z_m[k] \\ z_{m+1}[k] \\ \vdots \\ z_{m+n}[k] \end{bmatrix}$$

$$z_v[k] = y_v[k], \text{ dla } v = 1, 2, \dots, m,$$

$$z_v[k] = x_{v-m}[k], \text{ dla } v = m+1, m+2, \dots, m+n$$

układ równań (4) oraz funkcjonały (6) przedstawiono w postaci zredukowanej (7).

Przez identyfikację układów równań (1), (4) rozumie się zagadnienie doboru współczynników przy wyznaczonych z pomiarów na rzeczywistym obiekcie wartości

$\mathbf{x}_1[k], \mathbf{x}_2[k], \dots, \mathbf{x}_n[k]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N$  sygnałów wejściowych  $x_1, x_2, \dots, x_n$  oraz wartości  $\mathbf{y}_1[k], \mathbf{y}_2[k], \dots, \mathbf{y}_m[k]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N+1$  sygnałów wyjściowych  $y_1, y_2, \dots, y_m$  w chwilach  $t_k = kT$ .

Wartości pomiarowe można zapisać w postaci macierzy (8).

Współczynniki  $b_{i1}, \dots, b_{im}, a_{im+1}, i = 1, 2, \dots, m$  powyższego układu równań dobiera się tak, aby funkcjonały (9) dla  $i = 1, 2, \dots, m$  osiągały minimum.

Przy przyjętych oznaczeniach (6), funkcjonały (9) można zapisać w postaci (10).

Macierz (8) stanowi w istocie układ wektorów liniowo niezależnych w przestrzeni Hilberta (11).

Zagadnienie wyboru najlepszego modelu z klasy równań (11) w sensie minimalizacji wskaźników jakości identyfikacji rozwiązano, korzystając z twierdzenia o rzucie ortogonalnym [3, 6]. Z uwagi na obszerność zagadnienia pominięto przekształcenia prowadzące do równania w postaci macierzowej (12), gdzie:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^N \mathbf{y}_1[k] \mathbf{y}_1[k] & \dots & \sum_{k=0}^N \mathbf{y}_m[k] \mathbf{y}_1[k] & \sum_{k=0}^N \mathbf{x}_1[k] \mathbf{y}_1[k] & \dots & \sum_{k=0}^N \mathbf{x}_n[k] \mathbf{y}_1[k] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=0}^N \mathbf{y}_1[k] \mathbf{y}_m[k] & \dots & \sum_{k=0}^N \mathbf{y}_m[k] \mathbf{y}_m[k] & \sum_{k=0}^N \mathbf{x}_1[k] \mathbf{y}_m[k] & \dots & \sum_{k=0}^N \mathbf{x}_n[k] \mathbf{y}_m[k] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=0}^N \mathbf{y}_1[k] \mathbf{x}_1[k] & \dots & \sum_{k=0}^N \mathbf{y}_m[k] \mathbf{x}_1[k] & \sum_{k=0}^N \mathbf{x}_1[k] \mathbf{x}_1[k] & \dots & \sum_{k=0}^N \mathbf{x}_1[k] \mathbf{x}_n[k] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=0}^N \mathbf{y}_1[k] \mathbf{x}_n[k] & \dots & \sum_{k=0}^N \mathbf{y}_m[k] \mathbf{x}_n[k] & \sum_{k=0}^N \mathbf{x}_1[k] \mathbf{x}_n[k] & \dots & \sum_{k=0}^N \mathbf{x}_n[k] \mathbf{x}_n[k] \end{bmatrix} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$$

system of equations (4) and functionals (6) are shown in a reduced form:

$$\mathbf{y}[k+1] = \mathbf{C}\mathbf{z}[k] + \boldsymbol{\eta} \quad (7)$$

By identifying the system of equations (1), (4) we get to understand a problem of selecting coefficients using the values determined by measurements on a real object  $\mathbf{x}_1[k], \mathbf{x}_2[k], \dots, \mathbf{x}_n[k], k = 0, 1, 2, \dots, N$  input signals  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  and values  $\mathbf{y}_1[k], \mathbf{y}_2[k], \dots, \mathbf{y}_m[k], k = 0, 1, 2, \dots, N+1$  output signals  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m$  in instants  $t_k = kT$ .

Measured values can be written in a matrix form (8):

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2 | \dots | \mathbf{e}_m | \mathbf{e}_{m+1} | \mathbf{e}_{m+2} | \dots | \mathbf{e}_{m+n}] = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1[0] & \mathbf{y}_2[0] & \dots & \mathbf{y}_m[0] & \mathbf{x}_1[0] & \dots & \mathbf{x}_n[0] \\ \mathbf{y}_1[1] & \mathbf{y}_2[1] & \dots & \mathbf{y}_m[1] & \mathbf{x}_1[1] & \dots & \mathbf{x}_n[1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{y}_1[N] & \mathbf{y}_2[N] & \dots & \mathbf{y}_m[N] & \mathbf{x}_1[N] & \dots & \mathbf{x}_n[N] \end{bmatrix} \quad (8) \end{aligned}$$

Coefficients  $\mathbf{b}_{i1}, \dots, \mathbf{b}_{im}, \mathbf{a}_{im+1}, i = 1, 2, \dots, m$  of the above system of equations are chosen specifically so functional (9)

$$\begin{aligned} J_i(\mathbf{b}_{i1}, \dots, \mathbf{b}_{im}, \mathbf{a}_{im+1}, \dots, \mathbf{a}_{i(m+n)}) = \\ = \sqrt{\sum_{k=1}^N (\mathbf{a}_{i1}\mathbf{y}_1[k] + \dots + \mathbf{a}_{im}\mathbf{y}_m[k] + \mathbf{b}_{im+1}\mathbf{x}_1[k] + \dots + \mathbf{b}_{i(m+n)}\mathbf{x}_n[k] - \mathbf{y}_i[k+1])^2} \quad (9) \end{aligned}$$

reaches a minimum for  $i = 1, 2, \dots, m$ .

In the denotations adopted above (6), functionals (9) can be written as (10)

$$\begin{aligned} J_i(\mathbf{c}_{i1}, \mathbf{c}_{i2}, \dots, \mathbf{c}_{i(m+n)}) = \\ = \sqrt{\sum_{k=0}^N (\mathbf{c}_{i1}\mathbf{z}_1[k] + \dots + \mathbf{c}_{im}\mathbf{z}_m[k] + \mathbf{c}_{im+1}\mathbf{z}_{m+1}[k] + \dots + \mathbf{c}_{i(m+n)}\mathbf{z}_{m+n}[k] - \mathbf{y}_i[k+1])^2} \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i = 1, 2, \dots, m \quad \mathbf{z}_v[k] = \mathbf{y}_v[k], \text{ for } v = 1, 2, \dots, m, \\ \mathbf{z}_v[k] = \mathbf{x}_{v-m}[k], \text{ for } v = m+1, m+2, \dots, m+n \end{aligned}$$

Matrix (8) is essentially a system of linearly independent vectors in a Hilbert space

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1[0] \\ \mathbf{y}_1[1] \\ \vdots \\ \mathbf{y}_1[N] \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_2[0] \\ \mathbf{y}_2[1] \\ \vdots \\ \mathbf{y}_2[N] \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_m[0] \\ \mathbf{y}_m[1] \\ \vdots \\ \mathbf{y}_m[N] \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1[0] \\ \mathbf{x}_1[1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}_1[N] \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_{m+n} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_n[0] \\ \mathbf{x}_n[1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n[N] \end{bmatrix} \quad (11) \end{aligned}$$

$$(\mathbf{C}_i^0)^T = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{i1}^0 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{im}^0 \\ \mathbf{c}_{im+1}^0 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{i(m+n)}^0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^N \mathbf{y}_i[k+1]\mathbf{y}_i[k] \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^N \mathbf{y}_i[k+1]\mathbf{y}_n[k] \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^N \mathbf{y}_i[k+1]\mathbf{x}_n[k] \end{bmatrix} = \mathbf{X}^T \mathbf{y}_i[k+1]$$

Zatem równanie macierzowe (12) można przedstawić w postaci (13). Stąd otrzymuje się równanie (14). Zatem optymalne współczynniki  $\mathbf{c}_{ij}^0, i = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n$  zredukowanej postaci modelu (10) można wyznaczyć z równości (15)

$\mathbf{X}_{(N+1) \times (m+n)}$  – macierz wartości pomiarowych sygnałów  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ ,

$\mathbf{X}_{(m+n) \times (N+1)}^T$  – macierz transponowana do macierzy wartości pomiarowych sygnałów wejściowych,

$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_{(N+1) \times (N+1)}^{-1}$  – macierz odwrotna do macierzy Grama  $\mathbf{G}_{(N+1) \times (N+1)}$ ,

$\mathbf{Y}_{(N+1) \times m}^T[k+1]$  – macierz wartości pomiarowych sygnałów wyjściowych  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m$ ,

$\mathbf{Y}_{m \times (N+1)}^T$  – macierz transponowana do macierzy wartości pomiarowych sygnałów wyjściowych,

$N$  – liczba pomiarów,  $n$  – liczba sygnałów wejściowych,  $m$  – liczba sygnałów wyjściowych.

### 3. Badania procesów dynamicznych układu zasilania silnika paliwem modelami wielorównaniowymi

Badaniu podlegał układ zasilania silnika paliwem (układ wtryskowy) jednocylindrowego silnika badawczego 1-SB zainstalowanego w Laboratorium Eksploatacji Siłowni Okrętowych Akademii Marynarki Wojennej [10]. Materiał doświadczalny zebrany został według opracowanego dwuwartościowego planu frakcyjnego. Realizację poszczególnych układów pomiarowych (punktów pomiarowych) podanego planu doświadczenia wykonywano za pomocą programowalnego sterownika, co pozwoliło uzyskać dużą powtarzalność procesów dynamicznych. Jako czas trwania procesu dynamicznego przyjęto okres pomiędzy początkiem przesterowania elementów układu wtryskowego a ponowną stabilizacją wielkości wyjściowych. Czas ten dobrano eksperymentalnie i wynosił on około 320 s.

W celu identyfikacji wpływu stanu technicznego układu zasilania paliwem na parametry energetyczne silnika podczas procesów dynamicznych określono zbiory wielkości wejściowych (parametrów zadawanych) oraz wielkości wyjściowych (parametrów obserwowanych). Na potrzeby niniejszej pracy zbiór wielkości wejściowych  $\mathbf{X}$  ograniczono do trzech elementów, tj.:  $\mathbf{x}_1$  – prędkość obrotowa silnika  $n$

The issue of selecting the best model out of a class of equations (11) in the sense of minimizing the quality coefficient of identification was solved using the orthogonal projection theorem [3, 6]. Given the vastness of the issue, the shift leading to the equation in the matrix form was omitted:

$$\mathbf{G}(\mathbf{C}_i^0)^T = \mathbf{W}_i \quad (12)$$

where:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^N \tilde{y}_1[k] \tilde{y}_1[k] & \dots & \sum_{k=0}^N \tilde{y}_m[k] \tilde{y}_1[k] & \sum_{k=0}^N \tilde{x}_1[k] \tilde{y}_1[k] & \dots & \sum_{k=0}^N \tilde{x}_n[k] \tilde{y}_1[k] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=0}^N \tilde{y}_1[k] \tilde{y}_m[k] & \dots & \sum_{k=0}^N \tilde{y}_m[k] \tilde{y}_m[k] & \sum_{k=0}^N \tilde{x}_1[k] \tilde{y}_m[k] & \dots & \sum_{k=0}^N \tilde{x}_n[k] \tilde{y}_m[k] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=0}^N \tilde{y}_1[k] \tilde{x}_1[k] & \dots & \sum_{k=0}^N \tilde{y}_m[k] \tilde{x}_1[k] & \sum_{k=0}^N \tilde{x}_1[k] \tilde{x}_1[k] & \dots & \sum_{k=0}^N \tilde{x}_1[k] \tilde{x}_n[k] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=0}^N \tilde{y}_1[k] \tilde{x}_n[k] & \dots & \sum_{k=0}^N \tilde{y}_m[k] \tilde{x}_n[k] & \sum_{k=0}^N \tilde{x}_1[k] \tilde{x}_n[k] & \dots & \sum_{k=0}^N \tilde{x}_n[k] \tilde{x}_n[k] \end{bmatrix} = \mathbf{\tilde{X}}^T \mathbf{\tilde{X}} \quad (12)$$

$$(\mathbf{C}_i^0)^T = \begin{bmatrix} c_{i1}^0 \\ \vdots \\ c_{im}^0 \\ c_{im+1}^0 \\ \vdots \\ c_{im+n}^0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^N \tilde{y}_i[k+1] \tilde{y}_1[k] \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^N \tilde{y}_i[k+1] \tilde{y}_n[k] \\ \sum_{k=0}^N \tilde{y}_i[k+1] \tilde{x}_1[k] \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^N \tilde{y}_i[k+1] \tilde{x}_n[k] \end{bmatrix} = \mathbf{\tilde{X}}^T \tilde{\mathbf{y}}_i[k+1] \quad (12)$$

Thus, the matrix equation (12) can be expressed as:

$$(\mathbf{\tilde{X}}^T \mathbf{\tilde{X}})(\mathbf{C}_i^0)^T = \mathbf{\tilde{X}}^T \tilde{\mathbf{y}}_i[k+1] \quad (13)$$

Which gives

$$(\mathbf{C}_i^0)^T = (\mathbf{\tilde{X}}^T \mathbf{\tilde{X}})^{-1} \mathbf{\tilde{X}}^T \tilde{\mathbf{y}}_i[k+1], \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (14)$$

Thus, the optimal coefficients  $c_{ij}^0, i = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n$  of the reduced model form (10) can be determined from the equation:

$$(\mathbf{C}^0)^T = (\mathbf{\tilde{X}}^T \mathbf{\tilde{X}})^{-1} \mathbf{\tilde{X}}^T \tilde{\mathbf{Y}}[k+1] \quad (15)$$

$\mathbf{\tilde{X}}_{(N+1) \times (m+n)}$  – matrix of measured values of signals  $y_1, y_2, \dots, y_n, x_1, x_2, \dots, x_m$ ,

$\mathbf{\tilde{X}}_{(m+n) \times (N+1)}^T$  – matrix transposed to the matrix of measured values of input signals,

$(\mathbf{\tilde{X}}^T \mathbf{\tilde{X}})_{(N+1) \times (N+1)}^{-1}$  – inverse to the Gram matrix  $\mathbf{G}_{(N+1) \times (N+1)}$

$\tilde{\mathbf{Y}}_{(N+1) \times m}^T[k+1]$  – matrix of measured values of output signals  $y_1, y_2, \dots, y_m$ ,

$\tilde{\mathbf{Y}}_{m \times (N+1)}^T$  – matrix transposed to the matrix of measured values of output signals,

[obr/min];  $x_2$  – moment obrotowy silnika  $T_{iq}$  [N·m];  $x_3$  – zakokosowanie dysz rozpylacza  $S_k$  [ $\mu\text{m}^2$ ]. Podobnie postąpiono ze zbiorem wielkości wyjściowych  $Y$ , ograniczając liczbę jego elementów tylko do podstawowych związków toksycznych w kolektorze wylotowym:  $y_1$  – stężenie tlenku węgla w kolektorze wylotowym spalin  $C_{CO(k)}$  [ppm];  $y_2$  – stężenie węglowodorów w kolektorze wylotowym spalin  $C_{HC(k)}$  [ppm];  $y_3$  – stężenie tlenków azotu w kolektorze wylotowym spalin  $C_{NOx(k)}$  [ppm]. Zmiany wielkości wejściowych i wyjściowych podczas procesu dynamicznego przedstawiono na rys. 1.

Identyfikacji statystycznej dokonano za pomocą programu GRETl [2]. Estymację współczynników równań poszczególnych zmiennych wyjściowych przeprowadzono za pomocą metody najmniejszych kwadratów, a miała ona na celu weryfikację istotności jej parametrów i w efekcie odrzucenie wartości nieistotnych, co w konsekwencji doprowadziło do znacznego uproszczenia modeli. Wartości

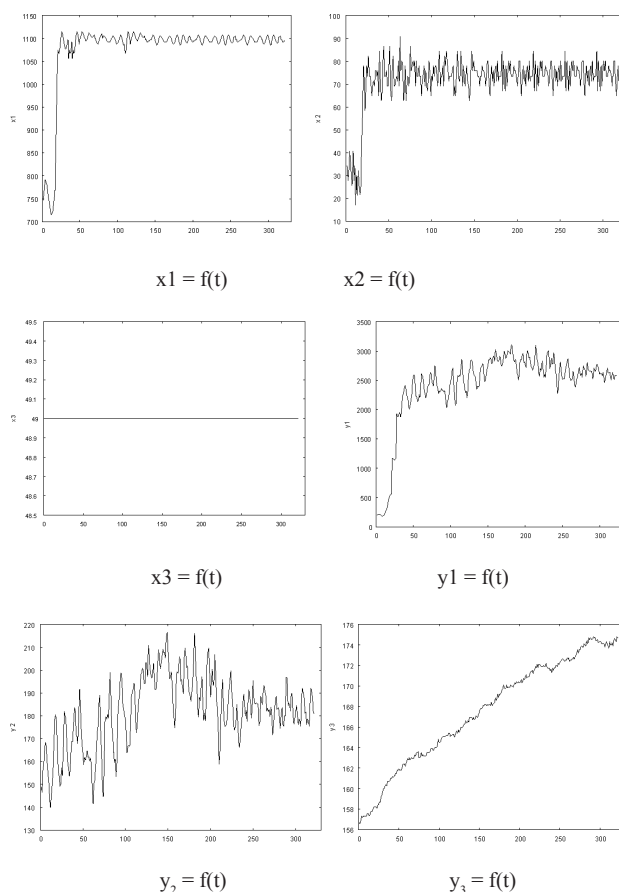


Fig. 1. Changes of the input and output quantities during the dynamic process where:  $x_1$  – engine speed  $n$  [rpm];  $x_2$  – engine torque  $T_{iq}$  [N·m];  $x_3$  – coking of the spray nozzle  $S_k$  [ $\mu\text{m}^2$ ];  $y_1$  – concentration of carbon monoxide in the exhaust manifold  $C_{CO(k)}$  [ppm];  $y_2$  – concentration of hydrocarbons in the exhaust manifold  $C_{HC(k)}$  [ppm];  $y_3$  – concentration of nitric oxides in the exhaust manifold  $C_{NOx(k)}$  [ppm];  $t$  – duration of the process [s]

Rys. 1. Zmiany wielkości wejściowych i wyjściowych podczas procesu dynamicznego:  $x_1$  – prędkość obrotowa silnika  $n$  [obr/min];  $x_2$  – moment obrotowy silnika  $T_{iq}$  [N·m];  $x_3$  – zakokosowanie dysz rozpylacza  $S_k$  [ $\mu\text{m}^2$ ];  $y_1$  – stężenie tlenku węgla w kolektorze wylotowym spalin  $C_{CO(k)}$  [ppm];  $y_2$  – stężenie węglowodorów w kolektorze wylotowym spalin  $C_{HC(k)}$  [ppm];  $y_3$  – stężenie tlenków azotu w kolektorze wylotowym spalin  $C_{NOx(k)}$  [ppm];  $t$  – czas trwania procesu [s]

N – number of measurements,  
n – number of input signals, m  
– number of output signals.

### 3. The study of dynamic processes in the engine fuel supply system through multi-equation models

The object of this research was the engine fuel supply system (fuel injection) of a single-cylinder test engine 1-SB installed in the Laboratory of the Operation of Marine Power Plants at the Polish Naval Academy (10). The experimental material was collected by a bivalent fractional plan. The implementation of specific measuring systems (measuring points) of the above experiment design was performed using a programmable controller that allowed a high repeatability of dynamic processes. The period between the onset of the clipping of the injection system components and the re-stabilization of the output quantities was adopted as the duration of the dynamic process. This period was selected through a series of experiments and it averaged to about 320 s.

Table 1. Least-squares estimation of the dependent variable  $y_1$ Tabela 1. Estymacja metodą najmniejszych kwadratów zmiennej zależnej  $y_1$ 

Variable/ zmienna	Coefficient/ współczynnik	Mean error/ błąd stand.	Student-t	p value/ wartość p	i significance/ istotność i
y3_1	2.91309	1.43271	2.0333	0.04286	**
x1_1	0.644317	0.130189	4.9491	< 0.00001	***
x3_1	-18.2606	5.31195	-3.4376	0.00067	***
y1_1	0.884015	0.0193211	45.7538	< 0.00001	***

Table 2. Least-squares estimation of the dependent variable  $y_2$ Tabela 2. Estymacja metodą najmniejszych kwadratów zmiennej zależnej  $y_2$ 

Variable/ zmienna	Coefficient/ współczynnik	Mean error/ błąd stand.	Student-t	p value/ wartość p	i significance/ istotność i
y1_1	0.00120044	0.00067661	1.7742	0.07699	*
x3_1	0.412034	0.0899356	4.5814	< 0.00001	***
y2_1	0.873606	0.0279092	31.3017	< 0.00001	***

Table 3. Least-squares estimation of the dependent variable  $y_3$ Tabela 3. Estymacja metodą najmniejszych kwadratów zmiennej zależnej  $y_3$ 

Variable/ zmienna	Coefficient/ współczynnik	Mean error/ błąd stand.	Student-t	p value/ wartość p	i significance/ istotność i
y1_1	-5.65987e-05	2.41816e-05	-2.3406	0.01987	**
x1_1	0.000396798	0.000206581	1.9208	0.05565	*
y3_1	0.998597	0.00112836	884.9995	< 0.00001	***

istotności parametrów modeli przedstawiono w tab. 1, 2, 3. Największemu uproszczeniu uległy równania opisujące zmiany stężenia węglowodorów ( $y_2$ ) oraz stężenia tlenków azotu ( $y_3$ ) (tab. 2, 3). Dla równania opisującego zmiany węglowodorów, w sposób istotny zależą one od paramet-

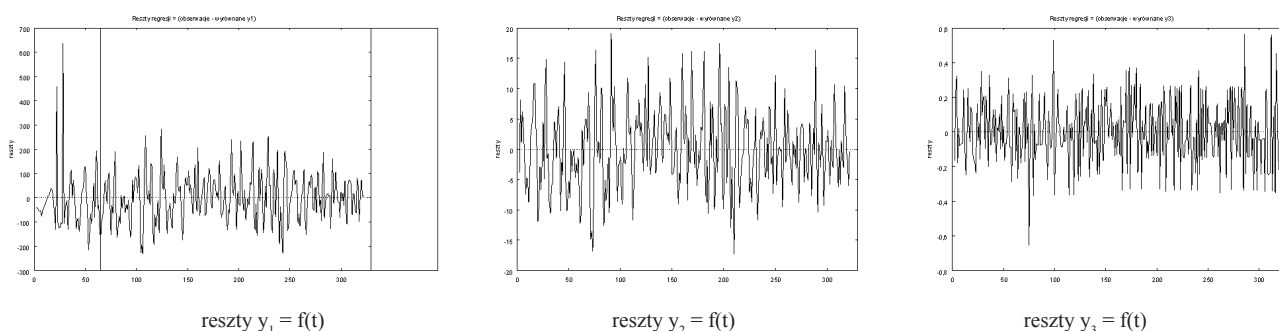


Fig. 2. Graph of the regression residuals for output variables where:  $y_1$  – concentration of carbon monoxide in the exhaust manifold  $C_{CO(k)}$  [ppm];  $y_2$  – concentration of hydrocarbons in the exhaust manifold  $C_{HC(k)}$  [ppm];  $y_3$  – concentration of nitric oxides in the exhaust manifold  $C_{NOx(k)}$  [ppm];  $t$  – duration of the process [s]

Rys. 2. Wykres reszt regresji dla zmiennych wyjściowych:  $y_1$  – stężenie tlenku węgla w kolektorze wylotowym spalin  $C_{CO(k)}$  [ppm];  $y_2$  – stężenie węglowodorów w kolektorze wylotowym spalin  $C_{HC(k)}$  [ppm];  $y_3$  – stężenie tlenków azotu w kolektorze wylotowym spalin  $C_{NOx(k)}$  [ppm];  $t$  – czas trwania procesu [s]

In order to identify the impact of the technical condition of the fuel supply system on the parameters of the engine power during dynamic processes, sets of input quantities (preset parameters) and output quantities (observed parameters) were defined. For the purpose of this study a set of input quantities  $X$  was limited to three elements, that is:

tru struktury, który reprezentuje zakoksowanie otworów rozpylacza ( $x_3$ ). Podobnie jest w odniesieniu do modelu opisującego zmiany stężenia tlenku węgla ( $y_1$ ).

O dobrym dopasowaniu modelu do wartości uzyskanych w wyniku eksperymentu na silniku może świadczyć równomierne rozłożenie reszt regresji od wartości średnich (rys. 2).



$x_1$  – engine speed  $n$  [rpm];  $x_2$  – engine torque  $T_{tq}$  [N·m];  $x_3$  – coking of the spray nozzle  $S_k$  [ $\mu\text{m}^2$ ].

Similar treatment was applied to the Y of the output quantities, limiting the number of its elements to only the primary exhaust components in the exhaust manifold:  $y_1$  – concentration of carbon monoxide in the exhaust manifold  $C_{\text{CO}(k)}$  [ppm];  $y_2$  – concentration of hydrocarbons in the exhaust manifold  $C_{\text{HC}(k)}$  [ppm];  $y_3$  – concentration of nitric oxides in the exhaust manifold  $C_{\text{NOx}(k)}$  [ppm]. Changes of the input and output quantities during the dynamic process have been shown in Fig. 1.

Statistical identification was made using GRETL [2]. Estimation of the equation coefficients for specific output variables was performed using the least-squares method and it had to verify the significance of its parameters and, consequently, the rejection of insignificant values, which consequently led to a significant simplification of the models. The significance values of model parameters have been shown in a graphical manner (Table 1, 2, 3). The equations describing the changes in the concentration of hydrocarbons ( $y_2$ ) and nitric oxides ( $y_3$ ) have undergone the greatest simplification. (Table 2, 3). In the case of the equation describing the change of the content of hydrocarbons they heavily depend on the structure parameter, which represents coking of the spray nozzle ( $x_3$ ). The case of a model describing the changes in the carbon monoxide content ( $y_1$ ) is similar.

An even distribution of residuals from the regression of mean values may be indicative of being a good fit model to the values obtained from the experiment on the engine.

#### 4. Summary

The presented description of the active experiment space by the multidimensional models gives great possibilities in the analysis of the measurement data and scientific reasoning. Furthermore, assuming that the matrix of the coefficients  $(C^\circ)^T$  is orthogonal, there is a possibility of fulfilling a reverse task, i.e. estimating with complex relevance and known input variables describing the work points (engine speed  $n$  and torque load  $T_{tq}$  and other input quantities. In further works the authors will attempt to investigate this issue.

*Paper reviewed/Artykuł recenzowany*

Ryszard Zadrag, DEng. – doctor in the Faculty of Mechanical and Electrical Engineering at Polish Naval Academy of Gdynia.

*Dr inż. Ryszard Zadrag – st. wykładowca na Wydziale Mechaniczno-Elektrycznym Akademii Marynarki wojennej w Gdyni.*

e-mail: [r.zadrag@amw.gdynia.pl](mailto:r.zadrag@amw.gdynia.pl)



#### 4. Podsumowanie

Przedstawiony opis przestrzeni eksperymentu czynnego za pomocą modeli wielowymiarowych daje wielkie możliwości w analizie danych pomiarowych i wnioskowaniu naukowym. Ponadto istnieje możliwość, przy założeniu ortogonalności macierzy współczynników  $(C^\circ)^T$ , wykonania zadania odwrotnego, czyli szacowania, z założoną istotnością, przy znanych zmiennych wejściowych opisujących punkt pracy, tj.: prędkości obrotowej silnika  $n$  i obciążenia momentem obrotowym  $T_{tq}$ , pozostałych wielkości wejściowych.

#### Bibliography/Literatura

- [1] Koško M., Osińska M., Stępińska J.: *Ekonometria współczesna*. TONiK, Toruń 2007.
- [2] Kufel T.: *Ekonometria. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem programu GRETL*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.
- [3] Kukielka L.: *Podstawy badań inżynierskich*. Wydawnictwo Naukowe PW, Warszawa 2002.
- [4] Piaseczny L., Zadrag R.: *The influence of selected damages of engine zs type on the changes of emission of exhaust gas components*. Silniki Spalinowe, Opole 2009.
- [5] Polański Z.: *Planowanie doświadczeń w technice*. PWN, Warszawa 1984.
- [6] Robertson J., Robertson S.: *Pełna analiza systemowa*. WNT, Warszawa 1999.
- [7] Zadrag R.: *Kryteria doboru parametru diagnostycznego na potrzeby diagnostyki okrętowego silnika spalinowego*, Logistyka nr 4/2010, Poznań 2010.
- [8] Zadrag R.: *Modele wielorównaniowe szczelności układu wymiany ładunku silnika okrętowego*. Silniki gazowe – wybrane zagadnienia, pod red. A. Dużyńskiego, seria Monografie nr 183. Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2010.
- [9] Zadrag R.: *The multi-equational models in the analysis of results of marine diesel engines research*. Międzynarodowa konferencja Eksplozjesel& Gas Turbine'2009. Międzyzdroje-Kopenhaga 2009.
- [10] Zadrag R. i in.: *Modele identyfikacji stanu technicznego silnika na podstawie oceny emisji składników spalin*. Sprawozdanie z projektu badawczego nr 4T12D 055 29. AMW, Gdynia 2008.
- [11] Zadrag R., Zellma M.: *Analiza wyników badań silników spalinowych przy wykorzystaniu modeli wielowymiarowych*. Sympozjum Siłowni Okrętowych Symso'2009, Gdynia 2009.

Marek Zellma, DEng. – doctor in the Faculty of Mechanical and Electrical Engineering at Polish Naval Academy of Gdynia.

*Dr inż. Marek Zellma – st. wykładowca na Wydziale Mechaniczno-Elektrycznym Akademii Marynarki Wojennej w Gdyni.*

e-mail: [m.zellma@amw.gdynia.pl](mailto:m.zellma@amw.gdynia.pl)

